Examen de Análisis Complejo

Licenciatura de Matemáticas. Esp. Metodología y Estadística e I.O.

10 de septiembre de 1999

1. Sea n un número natural mayor o igual que 3. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{\log z}{1+z^n}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z\in\mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < 2\pi/n\}, \quad (0 < \varepsilon < 1 < R)$$

calcúlense las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^n}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx.$$

2. Hállese el número de ceros del polinomio $z^8+3z^5+z^4-1$

   a) En el anillo $A(0;1,2)$

   b) En el semiplano de la derecha.

3. Hállese un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |z-1/4| > 1/4,\ |z| < 1/2\}$$

sobre el disco unidad $D(0,1)$.

4. Sea f una función entera y no constante verificando que $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$. Pruébese que f es de la forma $f(z) = \alpha z^n$ donde $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ y $n\in\mathbb{N}$.

5. Sea f una función continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en el disco unidad abierto, verificando que $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$. Pruébese que f es de la forma

$$f(z) = c\prod_{k=1}^{q}\left(\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}\right)^{m_k}$$

donde $q, m_k\in\mathbb{N}$, $a_k\in D(0,1)$ $(k = 1,2,\ldots,q)$, y $c\in\mathbb{C}$ con $|c| = 1$.